

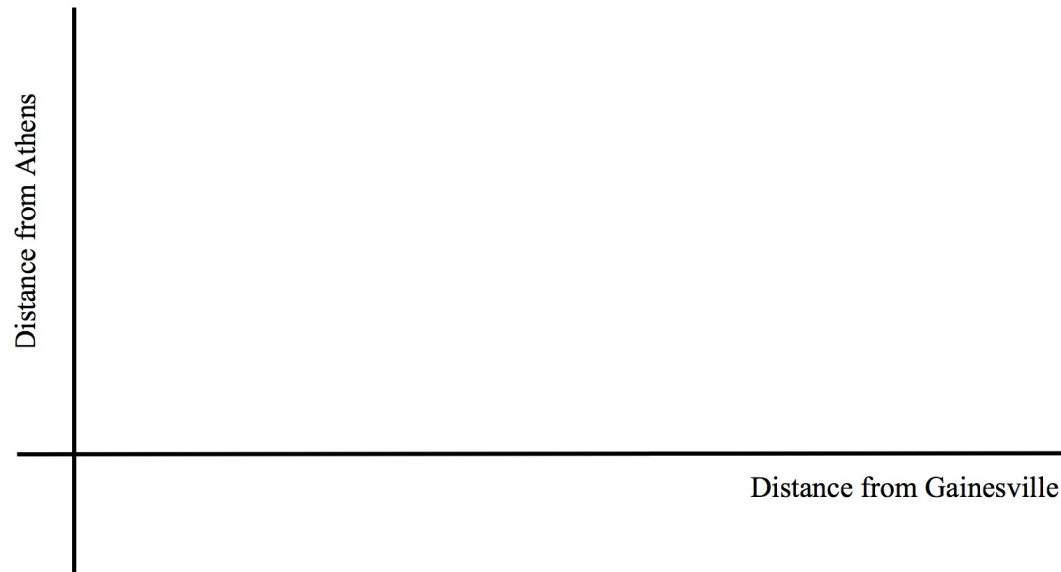
### Going Around Gainesville Part II

Create a graph that relates your distance from Gainesville and your distance from Athens during your trip.

**Jamboard**  
Link can be  
found in the  
Zoom Chat to  
create an  
online solution.

Zoom 채팅창에  
온라인 의견  
수합을 위한

Jamboard 링크가  
게시될 것입니다.



# Abstraction and the Graphing Foundations for Collegiate Mathematics

대학 수학을 위한 추상화와 그래핑 토대

Kevin C. Moore

케빈 무어 교수(조지아 대학교, 미국)

Thank you National Science Foundation grants DRL-1419973,  
DRL-1350342, DUE-1920538, and DUE-2032688.

이 연구는 미국 국립 과학 재단의 지원을 받아 수행된 과제입니다.



UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education

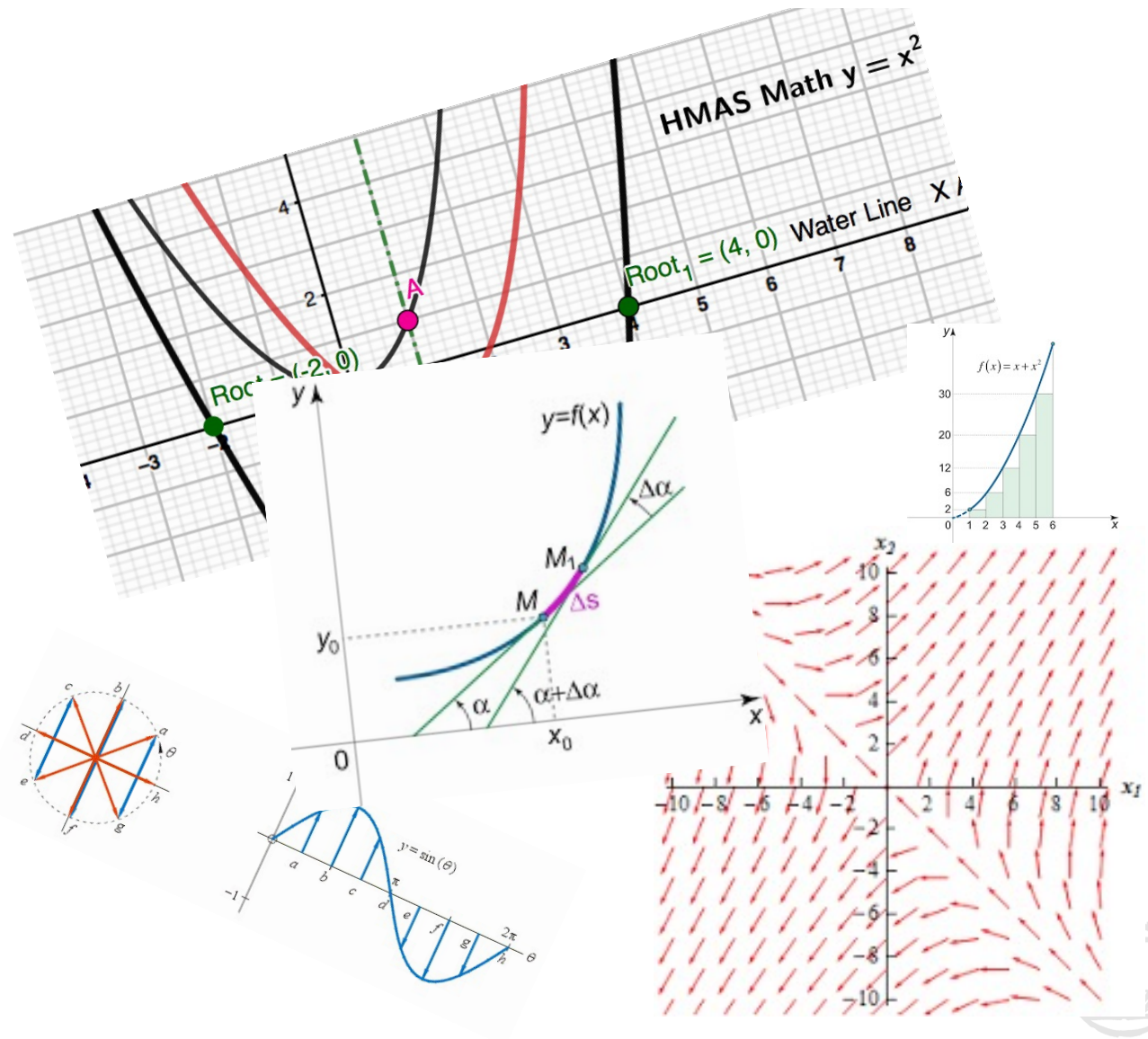


Graphs are pervasive in mathematics and mathematics education, particularly in grade 6-16 teaching.

그래프는 수학과 수학교육, 특히 6-16학년 과정에 널리 퍼져 있다.

Graphs are productive for a number of reasons, but these are not typically used to their potential in the teaching of graphs

그래프는 여러 가지 이유로 생산적이지만, 일반적으로 그래프를 가르칠 때 그래프가 가지는 잠재력은 사용되지 않는다.



세 주요  
(하지만 간단한)  
특징

# Three Important (but brief) Distinctions

Framing  
Foundations for  
Future Learning

미래 학습을 위한  
토대 프레임

Framing  
Models of Students'  
Mathematics

학생들의 수학의  
모델 프레임





“[Mathematical mental]  
operations have to operate  
on something” (Steffe,  
personal communication)

“[수학적으로 정신적인]  
조작은 무엇인가에 작용해야 한다”  
(Steffe와의 사적인 대화에서)



## 양적 조작과 공변적 조작

# Quantitative and Covariational Operations

Quantitative Operations are those operations of thought by which one constitutes situations as entailing **measurable attributes (e.g., length, area, speed, currency)** (Thompson, 2011).

양적 조작은 상황을 측정 가능한 속성(예: 길이, 면적, 속력, 통화)으로 구성하는 사고의 조작이다(Thompson, 2011).

Covariational Operations are those operations of thought that involve coordinating two measurable attributes including **the ways they vary together (e.g., how measurable attributes increase or decrease together)** (Carlson et al., 2002).

공변적 조작은 두 가지 측정 가능한 속성이 **함께 변하는 방식(예: 측정 가능한 속성이 함께 증가하거나 감소하는 방법)**을 포함하여 두 가지 측정 가능한 속성을 조정하는 사고의 조작이다(Carlson et al., 2002).



## 양적 조작과 공변적 조작

# Quantitative and Covariational Operations

Quantitative Operations include... unitizing, partitioning, iterating, disembedding, scaling, segmenting, images of variation/covariation, etc...

양적 조작은... 단위화, 나누기, 반복, 해체, 크기 조정, 분할, 변이/공변의 이미지 등을 포함

Covariational Operations include... amounts of change, coordinate of values, chunky continuous, smooth continuous, scaling-continuous, etc...

공변적 조작은... 변화량, 값의 좌표, 부분적 연속, 부드러운 연속, 스케일링 연속 등을 포함

go visit Ellis, Carlson, Norton, Thompson, Paoletti, Hackenberg, Johnson, Frank, Lee, Stevens, Liang, Tasova, Tallman, Fonger, Castillo-Garsow, Tillema, Ulrich, Steffe for detailed descriptions of specific operations.

특정한 조작의 자세한 설명을 원한다면  
위의 학자의 참고문헌을 찾아보길 바람



Quantitative and Covariational Operations  
have to operate on something...

양적 조작과 공변적 조작은  
어떤 것을 조작해야 한다...



UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education



양적 조작과 공변적 조작은 어떤 것을 조작해야 한다...

Quantitative and Covariational Operations  
have to operate on something...

$$3 \quad y = \sin(x)$$

Do not afford material on  
which quantitative and  
covariational operations can  
operate. They are intended to  
symbolize those operations.

양적 조작 및 공변적 조작이 작동할 수  
있는 도구를 제공하지 않는다. 이 조작을  
상징화 할 수 있다.



양적 조작과 공변적 조작은 어떤 것을 조작해야 한다...

Quantitative and Covariational Operations  
have to operate on something...

3  $y = \sin(x)$

Do not afford material on which quantitative and covariational operations can operate. But they are intended to symbolize those operations.

양적 조작 및 공변적 조작이 작동할 수 있는 도구를 제공하지 않는다. 그러나 그 도구는 조작을 나타내려 할 것이다.

College of Education

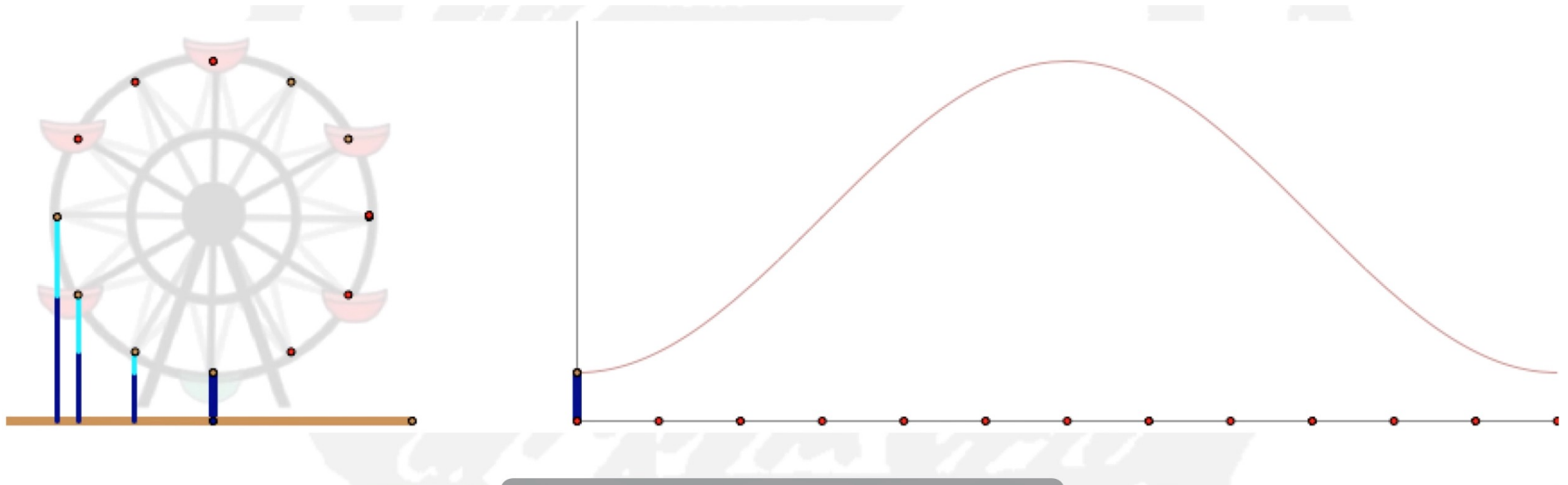
Afford material on which quantitative and covariational operations can operate.

양적 조작 및 공변적 조작이 작동할 수 있는 도구를 제공한다.



양적 조작과 공변적 조작은 어떤 것을 조작해야 한다...

## Quantitative and Covariational Operations have to operate on something...



A benefit of representations that entail material to operate on is that they enable conceiving equivalence in the mathematical properties of those operations.

조작이 작동하는 도구를 수반하는 표현의 이점은  
해당 조작의 수학적 성질에서 동치를 부여할 수 있다는 것이다.



세 주요  
(하지만 간단한)  
특징

# Three Important (but brief) Distinctions

Framing  
Foundations for  
Future Learning

미래 학습을 위한  
토대 프레임

Framing  
Models of Students'  
Mathematics

학생들의 수학의  
모델 프레임





Figurative Thought

형상적 사고

Operative Thought

조작적 사고



UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education



# Figurative Thought (Piaget) 형상적 사고 (피아제)



(Steffe, 1991)

Figurative counting scheme: Steffe identified that students could count without objects but needed some form of perceptual/sensorimotor re-presentation.

형상적 수 세기 도식: Steffe는 학생들이 물체 없이도 수를 셀 수 있지만 어떤 형태의 지각적/감각운동적 재표현이 필요하다는 것을 확인했다.

Operative counting scheme: Steffe identified that students could internalize actions to the extent that a student conceives “5” etc. as anticipated, mental counts.

5...6, 7, 8...12



UNIVERSITY OF  
GEORGIA

Mary Frances Early  
College of Education



# Operative Thought (Piaget) 조작적 사고 (피아제)



(Steffe, 1991)

Figurative counting scheme: Steffe identified that students could count without objects but needed some form of perceptual/sensorimotor re-representation.

5...6, 7, 8...12



Operative counting scheme: Steffe identified that students could internalize actions to the extent that a student conceives “5” etc. as anticipated, mental counts.

조작적 수 세기 도식: Steffe는 학생이 예상한 정신적인 수 세기로 "5" 등을 인식하는 정도로 학생들이 행동을 내면화할 수 있다는 것을 확인했다.



# Figurative and Operative Thought (Piaget)



형상적 사고와  
조작적 사고  
(피아제)

(Steffe, 1991)

Figurative Thought: Thought based in, constrained to, and dominated by perceptual elements and activity and its results so that the results are not dissociated from the actions themselves.

형상적 수 세기 도식: Steffe는 학생들이 물체 없이도 수를 셀 수 있지만 어떤 형태의 지각적/감각운동적 재표현이 필요하다는 것을 확인했다.

Operative Thought: Thought that foregrounds the coordination and re-presentation of internalized actions and the transformation of those actions.

조작적 수 세기 도식: Steffe는 학생이 예상한 정신적인 수 세기로 "5" 등을 인식하는 정도로 학생들이 행동을 내면화할 수 있다는 것을 확인했다.

5...6, 7, 8...12



# A Graphing Illustration

## 그래핑 사례



UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education



# A Graphing Illustration

## 그래핑 사례

“...it's backwards...”

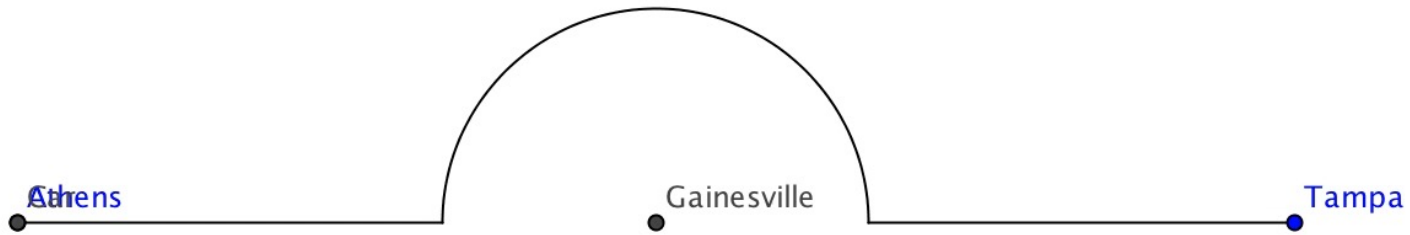
“반대 방향이에요”



UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education

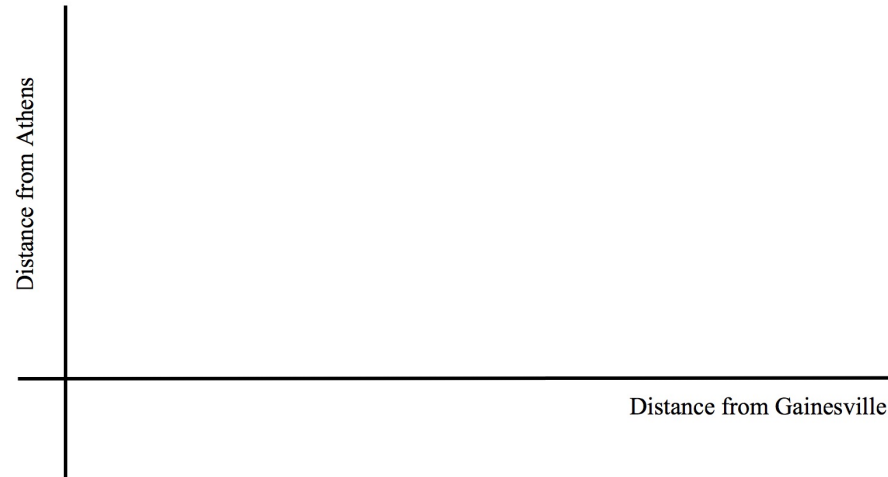


# “It’s Backwards” “반대 방향이에요”



## Going Around Gainesville Part II

Create a graph that relates your distance from Gainesville and your distance from Athens during your trip.



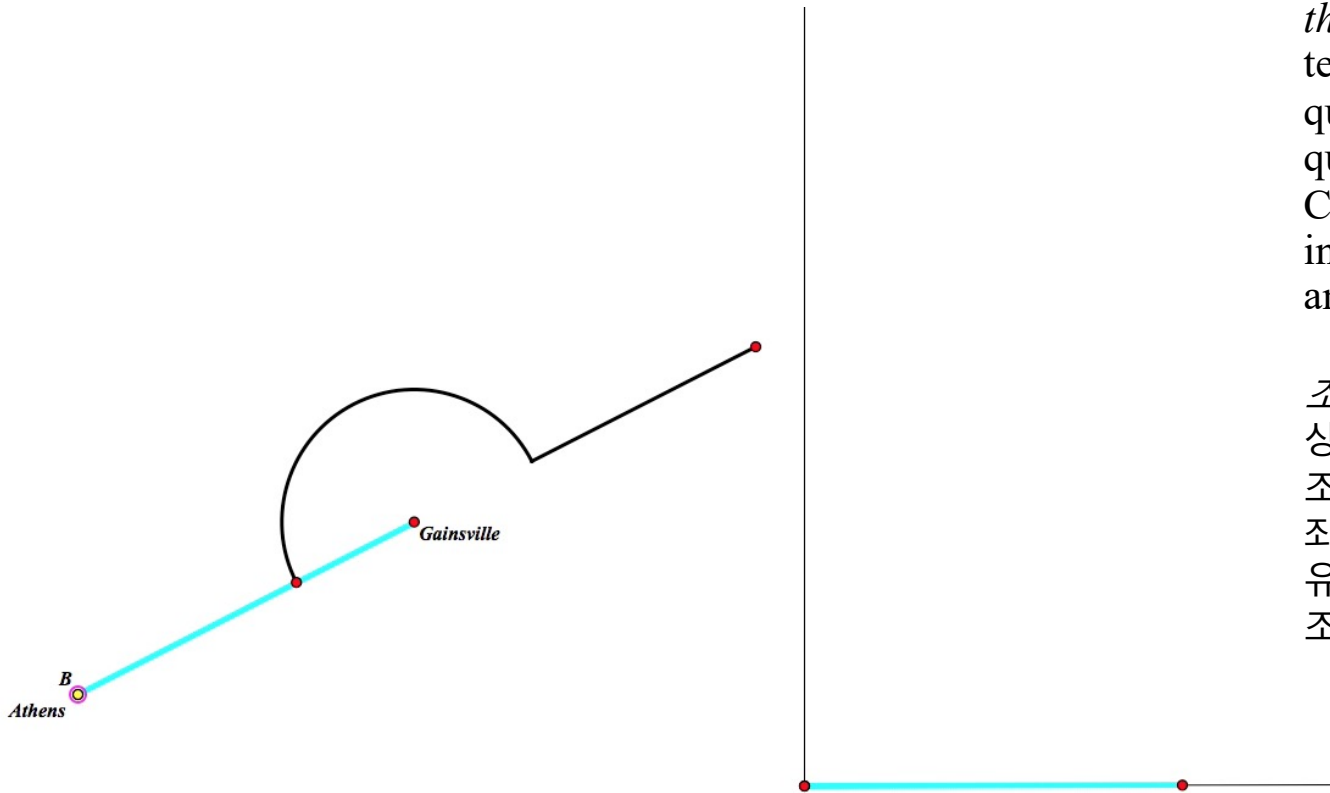
UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education



## “반대 방향이에요” “It’s Backwards”

A solution that foregrounds *operative thought*: The situation is conceived in terms of the coordination of two quantities’ magnitudes, and those quantities are transformed to a Cartesian orientation and coordinated in a way to maintain that relationship and produce a graph.

조작적 사고를 중시하는 해결책 :  
상황은 두 수량의 크기에 대한  
조정에서 고려되며, 이때 그 수량은  
좌표계의 방향으로 변환되고 관계를  
유지하고 그래프를 생성하는 방식으로  
조정된다.

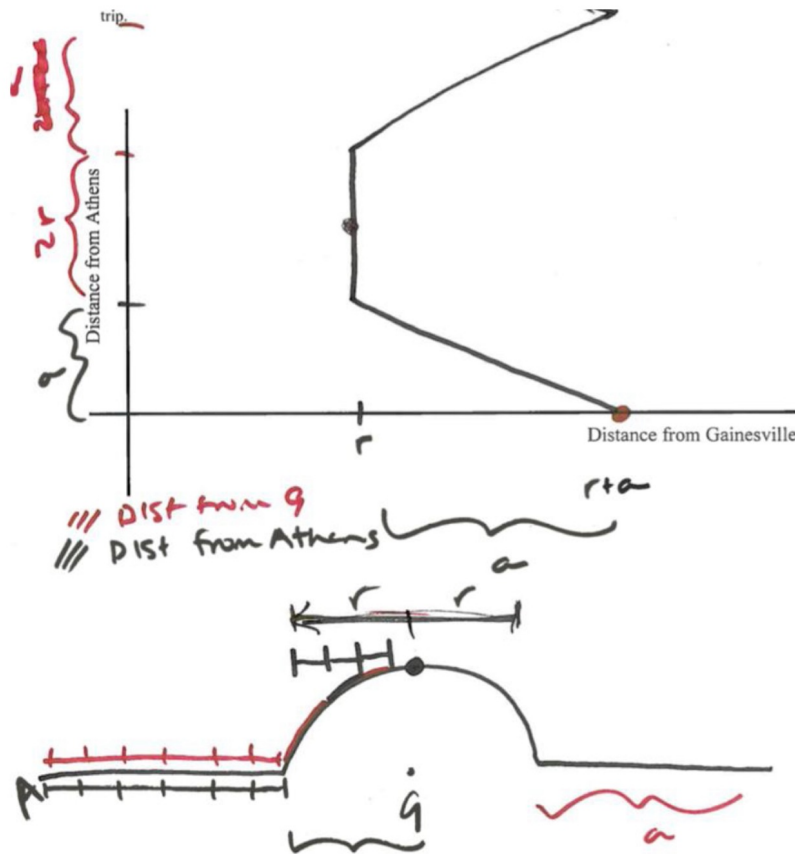




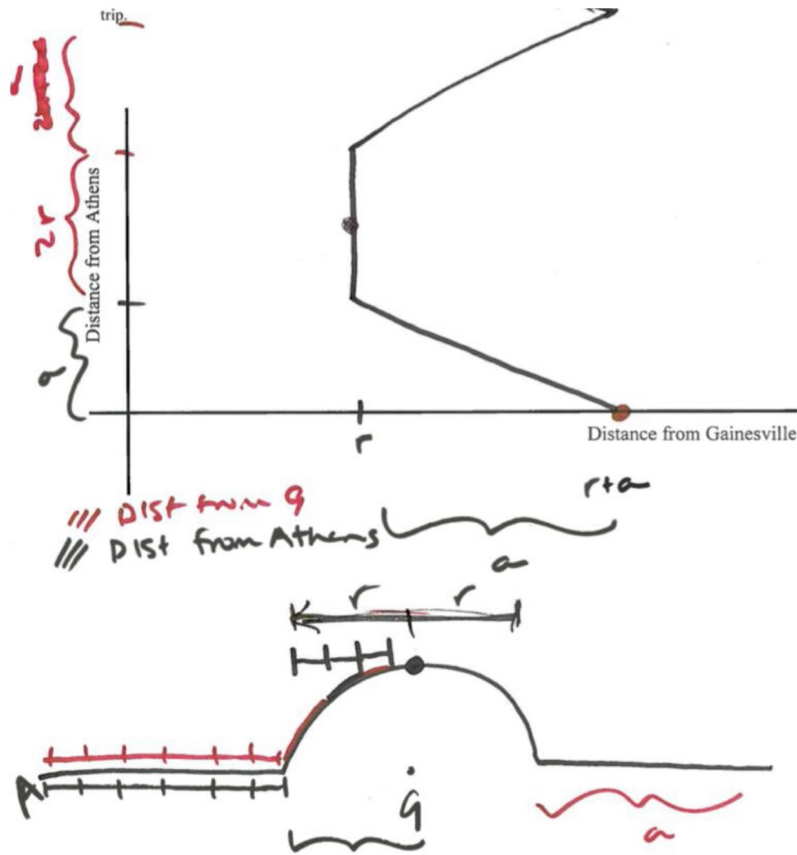
# “반대 방향이에요” “It’s Backwards”

A solution that foregrounds *operative thought*: The situation is conceived in terms of the coordination of two quantities’ magnitudes, and those quantities are transformed to a Cartesian orientation and coordinated in a way to maintain that relationship and produce a graph.

조작적 사고를 중시하는 해결책 :  
상황은 두 수량의 크기에 대한 조정  
에서 고려되며, 이때 그 수량은  
좌표계의 방향으로 변환되고 관계를  
유지하고 그래프를 생성하는 방식으로  
조정된다.



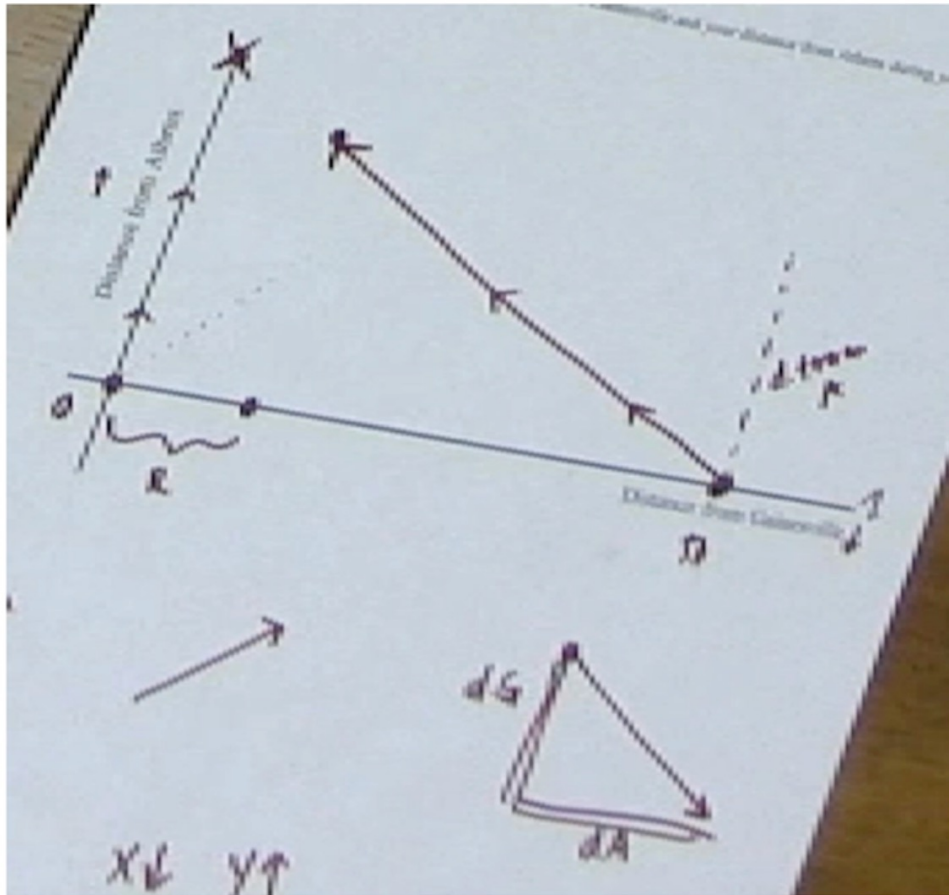
## “반대 방향이에요” “It’s Backwards”



Student: “As we travel...for equal changes in distance from Athens...our distance from Gainesville is also changing by the same amount...but it's decreasing...by the same amount.”

학생 : “아테네를 떠나서... 여행한  
거리만큼... 똑같은 만큼  
게인스빌과의 거리도 변해요...  
하지만 감소하는 쪽으로... 똑같은  
만큼이요.”

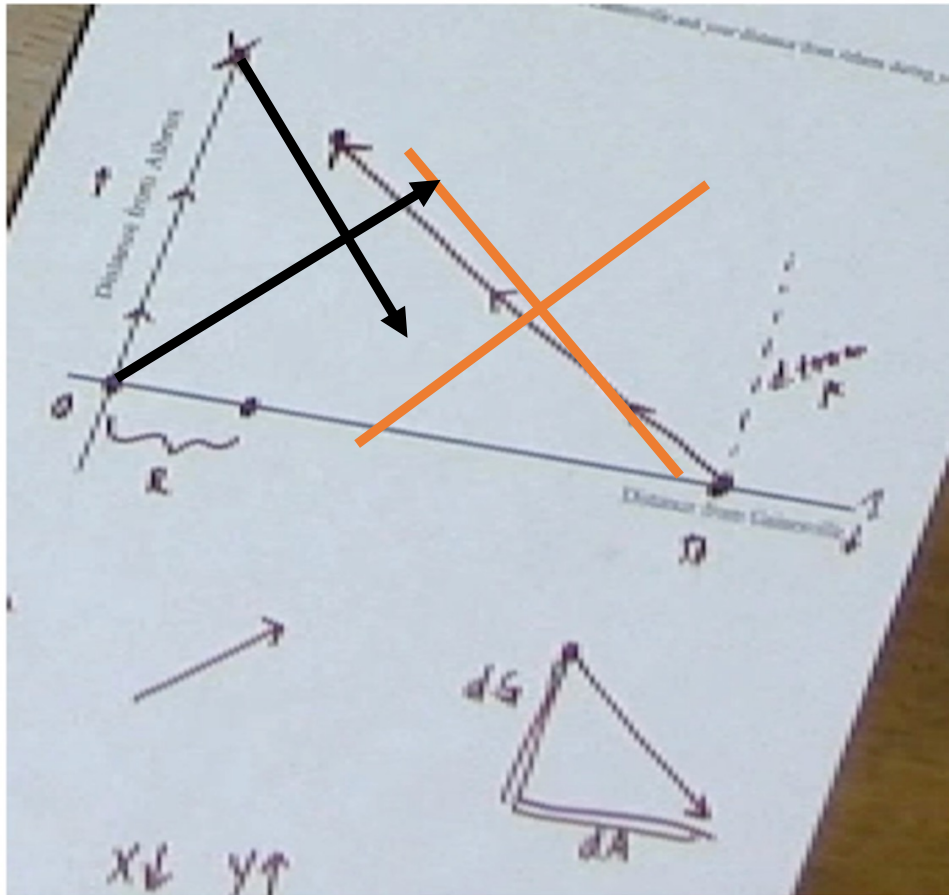
## “반대 방향이에요” “It’s Backwards”



A solution that foregrounds *figurative thought*: The way the graph is drawn in its direction (left-to-right from the vertical axis) is focused on and privileged more than quantities and their relationship.

형상적 사고를 중시하는 해결책 :  
그래프가 그 방향(수직축으로부터  
왼쪽에서 오른쪽)에 따라 그려지는 방식에  
수량 및 이들의 관계보다 더 초점을 두고  
특히 중시한다.

## “반대 방향이에요” “It’s Backwards”



Student: “Because it's backwards...Backwards is traveling from right-to-left. But I think my graph is just, I think I'm just not clicking. I think I'm missing something.

학생 : “왜냐하면 반대 방향이니까... 반대라는 건 오른쪽에서 왼쪽으로 여행한다는 거예요. 하지만 제 그래프는 그게, 이해를 잘 못하겠어요. 뭔가 놓친 것 같아요.”

세 주요  
(하지만 간단한)  
특징

# Three Important (but brief) Distinctions

Framing  
Foundations for  
Future Learning

미래 학습을 위한  
토대 프레임

Framing  
Models of Students'  
Mathematics

학생들의 수학의  
모델 프레임



# What Is A Convention?

## 관습이란 무엇인가?



UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education



# A Convention 관습

A person has a convention in mind when that person has in mind:

(1) a concept (e.g., relationships or functions and their graphs),

다음의 것들을 염두에 두고 있을 때, 개인이 관습을 갖게 된다.

(1) 개념 (예: 관계 또는 함수와 그래프),

(2) a community of individuals (e.g., a faculty of teachers),

(2) 개개인의 공동체(예: 교사진).

(3) and some re-presentational practice (e.g.,  $x$  on the Cartesian horizontal axis) that they perceive as a choice in that community among a variety of equally valid choices (e.g.,  $x$  on the Cartesian vertical axis).

(3) 그리고 다양하고 동등하게 유효한 선택(예: 좌표계 수직축에  $x$ ) 중에서 공동체 내 선택으로 인식하는 일부 재-표현의 관행(예: 좌표계 수평축에  $x$ ).

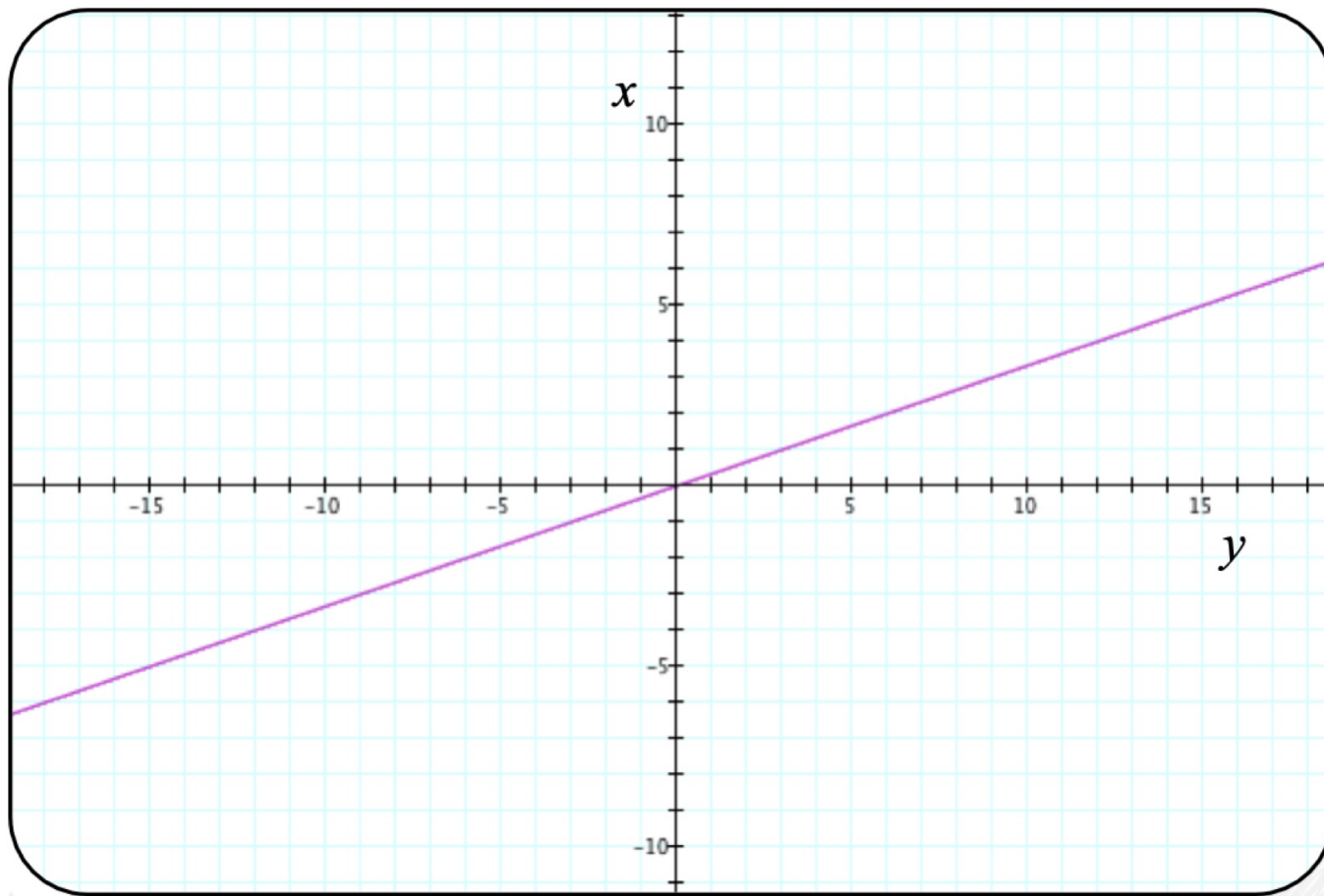


UNIVERSITY OF  
GEORGIA

Mary Frances Early  
College of Education



## A Convention 관습



A (viable) graph of  $y = 3x$  that we posed as a hypothetical student solution, first without the axes labels and then with the axes labels.

먼저 축 레이블을 제거하고 그 다음에 축 레이블을 붙인다고 할 때, 우리가 가상의 학생 답안으로 제시한 (가능한)  $y = 3x$  그래프.

Design-informed convention:  $x$  on the horizontal axis and  $y$  on the vertical axes.

안내된 설계 관습 : 가로축에  $x$ 가 있고 세로축에  $y$ 가 있다.





# A Convention 관습

| Category code 범주 코드                          | PST Response Category 예비 교사 반응의 범주  | # out of 31                           |
|--|---|---------------------------------------|
| Habitual use of “convention”<br>“관습”의 습관적 사용 | Hypothetical student did not construct a correct graph                      | 가상의 학생은 정확한 그래프를 구성하지 않았다.<br>5       |
| 가설의 학생이 정확한 그래프를 구성했지만                       | Hypothetical student constructed a graph that is both correct and incorrect | 11                                    |
| 관습으로서의 관습                                    | Uncertain if the hypothetical student constructed a correct graph           | 가상의 학생은 정확하고도 정확하지 않은 그래프를 구성했다.<br>4 |
| Convention <i>qua</i> convention 불확실한        | Hypothetical student unquestionably constructed a correct graph             | 11                                    |

가상의 학생은 의심 없이 정확한 그래프를 구성했다.

Twenty of thirty-one prospective teachers claimed the graph did not unquestionably represent  $y = 3x$ .

31명의 예비 교사 중 20명은 의심할 나위 없이 그래프가  $y = 3x$ 를 나타내지 않는다고 주장했다.

“They messed up the placement of x and y.”

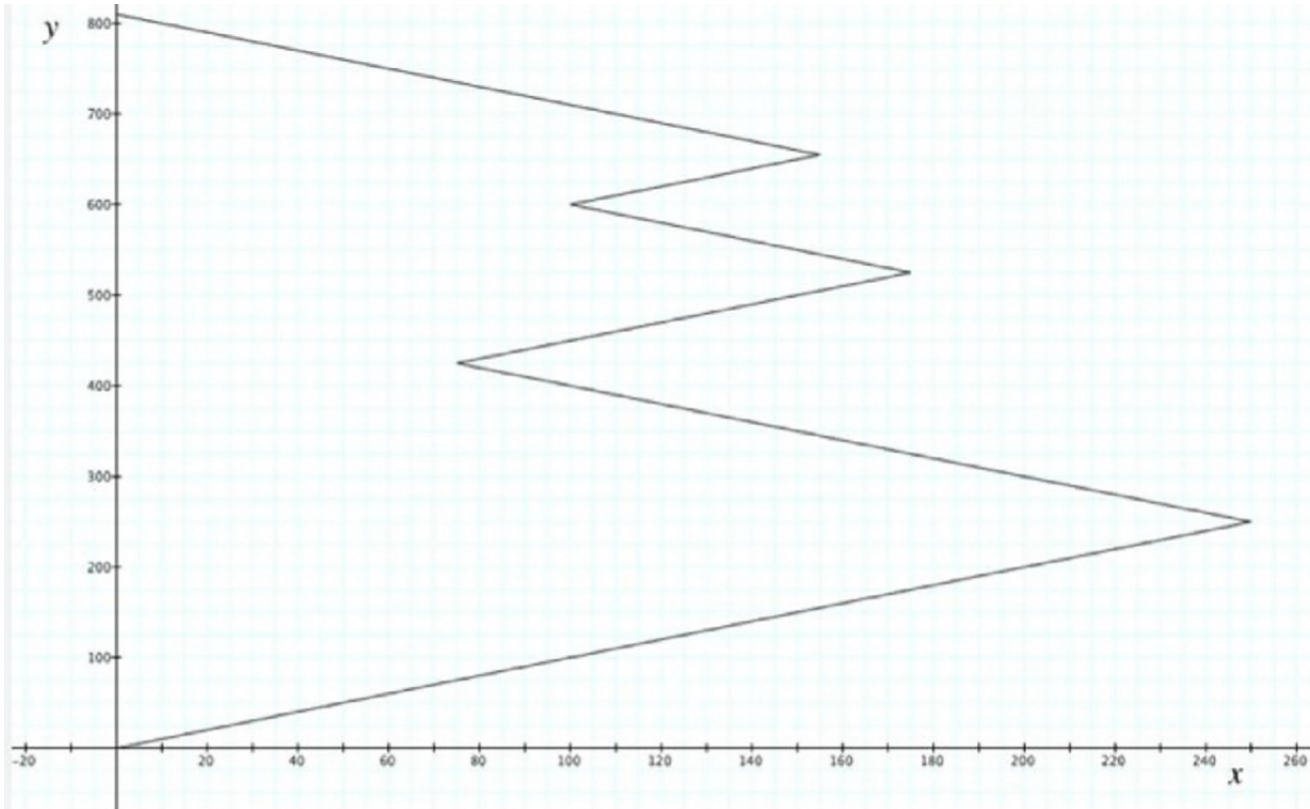
“예비교사는  $x$ 와  $y$ 의 위치를 헷갈렸다.”

“The horizontal axis should always be x and the vertical axis should always be y.”

“가로축은 항상  $x$ 여야 하고 세로축은 항상  $y$ 여야 한다.”



# A Convention 관습



A graph we posed with the question "Is there some way that we or a student could consider the graph as representative of a function?" and then the claim "x is a function of y."

우리가 "우리나 학생이 그래프를 함수의 대표성으로 여길 수 있는 방법이 있을까?"라는 질문에 이어 "x는 y의 함수이다"라는 주장과 함께 제안한 그래프.

Design-informed convention: a function's input is represented on the horizontal axis.

안내된 설계 관습 : 함수의 입력값은 가로축에 나타난다.



UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education



# A Convention 관습

“예비교사나 학생이 함수의 대표로서 그래프를 생각할 수 있도록 하는 방법이 있습니까?”

PST responses to the question, “Is there some way that we or a student could consider the graph as representative of a function?”.

| PST Response Category   | 예비교사 반응 범주  | # out of 25 |
|---|---|-------------|
| Yes, if rotated counter-clockwise 90-degrees  | 네, 반시계방향으로 90도 돌리면 가능합니다.   | 6           |
| Yes, if rotated counter-clockwise 90-degrees and axes relabeled so that y and x were represented along the vertical and horizontal axes, respectively, in the new orientation | 네, 반시계방향으로 90도 돌리고 새로운 방향으로 y가 세로축, x가 가로축이 되도록 축의 이름을 재표기하면 가능합니다. | 5           |
| Did not determine how a hypothetical student might claim that the graph represents a function; maintained that the graph does not represent a function                        | 가상의 학생이 함수를 표현하는 그래프를 어떻게 주장할지 결정할 수 없습니다; 함수를 나타내는 그래프로 유지했다.      | 14          |

Eleven of the twenty-five prospective teachers identified that rotating the graph (with some requiring re-labeling) yielded a graph that was representative of a function.

25명의 예비 교사 중 11명은 함수를 대표하는 그래프를 찾기 위해 (일부 예비교사는 축의 이름을 재표기하는 것을 요구하며) 그래프를 회전하는 것을 확인했다.



# A Convention 관습

PST responses to the statement, “ $x$  is a function of  $y$ .”. 예비교사는 “ $x$ 는  $y$ 의 함수이다”라는 명제에 다음과 같이 대답함

| Category code                    | PST Response Category   | # out of 25 |
|----------------------------------|---|-------------|
| Habitual use of “convention”     | Unsure  | 1           |
| “관습”의 습관적 사용                     | Not true      네, 반시계방향으로 90도 돌리고 $y$ 가 세로축, $x$ 가 가로축이 되도록 축의 이름을 재표기하면 가능합니다.  | 9           |
|                                  | True, if rotated counterclockwise 90-degrees and axes relabeled so that $y$ and $x$ were represented along the vertical and horizontal axes, respectively, in the new orientation | 1           |
| 관습으로서의 관습                        | True, if graph is rotated counterclockwise 90-degrees      네, 반시계방향으로 90도 돌리면 가능합니다.  | 7           |
| Convention <i>qua</i> convention | True  | 7           |

Eighteen of the twenty-five prospective teachers stated that “ $x$  is a function of  $y$ ” is not a true statement for the graph as presented.

25명의 예비교사 중 18명은 제시된 그래프에 대해 “ $x$ 는  $y$ 의 함수이다”라는 명제가 참이 아니라고 말했다.

“I mean these, the same  $x$ -value can give you six different  $y$ -values.”

“이 명제는 동일한  $x$ 값이 서로 다른 6개의  $y$ 값을 줄 수 있다는 의미입니다”

“If  $x$  is a function of  $y$ , well you can’t for it to be a function you can’t have more than one  $y$ -value for the  $x$ .”

“만약  $x$ 가  $y$ 의 함수라면, 하나의  $x$ 에 대해 하나 이상의  $y$ 값을 가지는 함수가 될 수 없다는 것입니다.”

“This is the graph of  $y$  as a function of  $x$ .”

“ $y$ 의 그래프는  $x$ 의 함수입니다.”



세 주요  
(하지만 간단한)  
특징

# Three Important (but brief) Distinctions

Framing  
Foundations for  
Future Learning

미래 학습을 위한  
토대 프레임

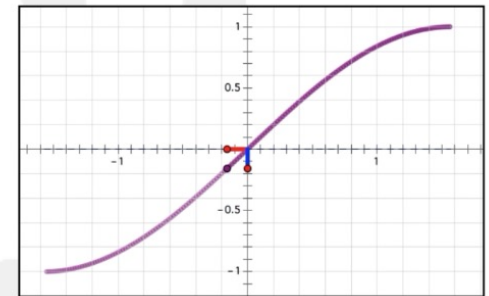
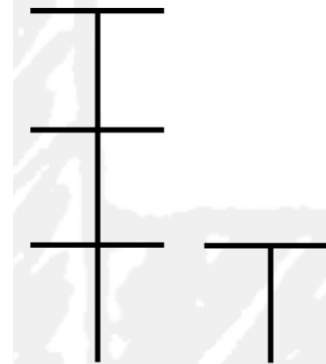
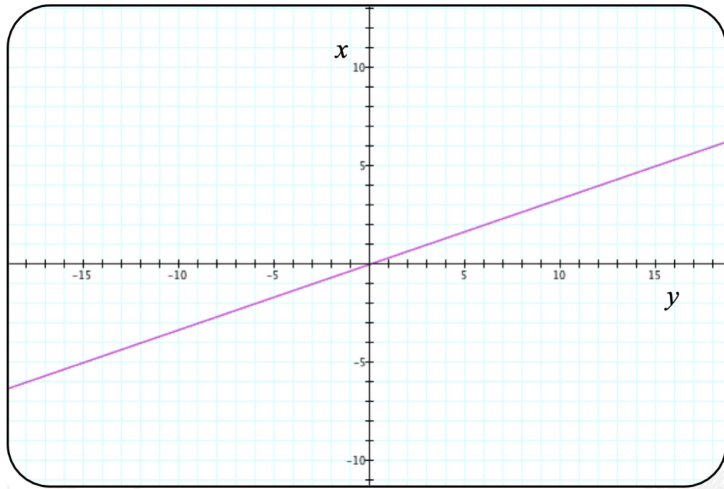
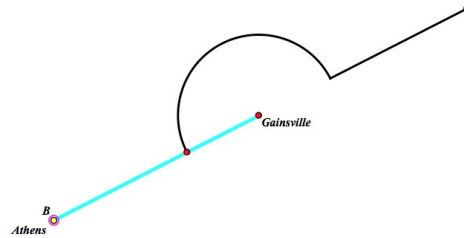
Framing  
Models of Students'  
Mathematics

학생들의 수학의  
모델 프레임



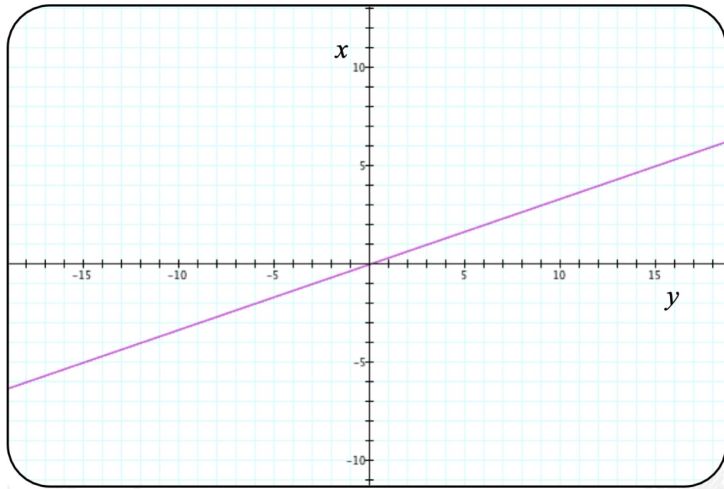
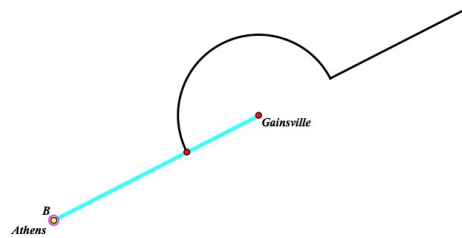
# Pulling Together Three Important Distinctions

세 주요 특징의  
통합



# Pulling Together Three Important Distinctions

## 세 주요 특징의 통합



Provide students sufficient opportunities to enact and reflect on mental operations across a variety of situations and material that afford those operations.

학생들에게 조작 가능한 다양한 상황과 도구를 아우르는 정신적 조작을 실행하고 반영한 충분한 활동을 제공한다.



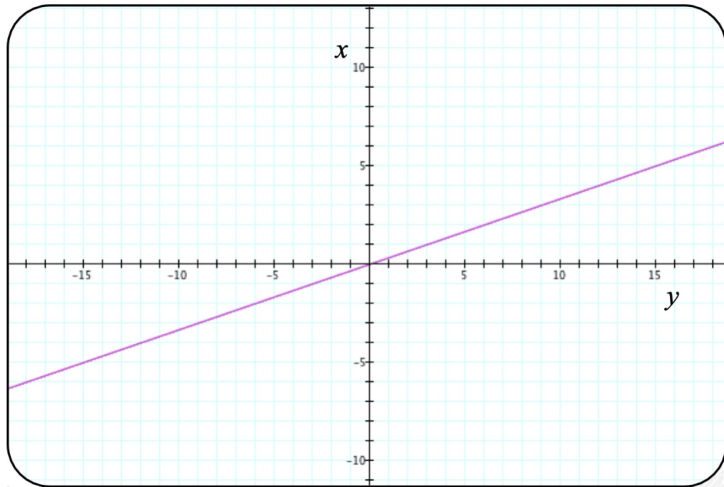
# Pulling Together Three Important Distinctions

## 세 주요 특징의 통합

Design opportunities that target figurative and operative forms of thought in order to engender and privilege the coordination and transformation of mental operations rather than perceptual features.

지각적 특징보다 정신적 조작의 조정과 변환을 발생시키고 중시하도록 하기 위해 사과의 형상적, 조작적 형태를 기회를 설계한다.

B  
Athens



Provide students sufficient opportunities to enact and reflect on mental operations across a variety of situations and material that afford those operations.

학생들에게 조작 가능한 다양한 상황과 도구를 아우르는 정신적 조작을 실행하고 반영한 충분한 활동을 제공한다.





# Pulling Together Three Important Distinctions

## 세 주요 특징의 통합

Design opportunities that target figurative and operative forms of thought in order to engender and privilege the coordination and transformation of mental operations more than perceptual features.

지각적 특징보다 정신적 조작의 조정과 변환을 발생시키고 중시하도록 하기 위해 사고의 형상적, 조작적 형태를 기회를 설계한다.

B  
Athens

Give students opportunities to establish conventions when differentiating what is critical to representing some concept from what is merely an element specific to that representation or communication.

어떤 개념을 표현하기 위해 중요한 것을 단순히 표현이나 의사소통이라는 요소로부터 구별할 때, 학생들에게 관습을 세울 기회를 부여한다.

Mary Frances Early,  
College of Education

Provide students sufficient opportunities to enact and reflect on mental operations across a variety of situations and material that afford those operations.

학생들에게 조작 가능한 다양한 상황과 도구를 아우르는 정신적 조작을 실행하고 반영한 충분한 활동을 제공한다.



# Pulling Together Three Important Distinctions

## 세 주요 특징의 통합

Provide students sufficient opportunities to enact and reflect on mental operations across a variety of situations and material that afford those operations.

학생들에게 조작 가능한 다양한 상황과 도구를 아우르는 정신적 조작을 실행하고 반영한 충분한 활동을 제공한다.

Design opportunities that target figurative and operative forms of thought in order to engender and privilege the coordination and transformation of mental operations rather than perceptual features.

지각적 특징보다 정신적 조작의 조정과 변환을 발생시키고 중시하도록 하기 위해 사고의 형상적, 조작적 형태를 기회를 설계한다.

Give students opportunities to establish conventions when differentiating what is critical to representing some concept from what is merely an element specific to that representation or communication.

어떤 개념을 표현하기 위해 중요한 것을 단순하게 표현이나 의사소통이라는 요소로부터 구별할 때, 학생들에게 관습을 세울 기회를 부여한다.



# Pulling Together Three Important Distinctions

## 세 주요 특징의 통합

ENACT AND REFLECT ON OPERATIONS

조작을 실행하고 반영한다.

COORDINATE AND TRANSFORM OPERATIONS TO CONCEIVE EQUIVALENCE DESPITE  
FIGURATIVE DIFFERENCES

형상적 차이에도 동치를 이루기 위해 조작을 조정하고 변환한다.

UNDERSTAND CONVENTIONS AS A CHOICE THAT IS NOT REQUIRED

관습을 필수가 아닌 선택으로 이해한다.



UNIVERSITY OF  
GEORGIA

Mary Frances Early  
College of Education



We (mathematics educators) often fail to do  
these things.

우리(수학 교육자)는 종종 다음을 하지 못한다.

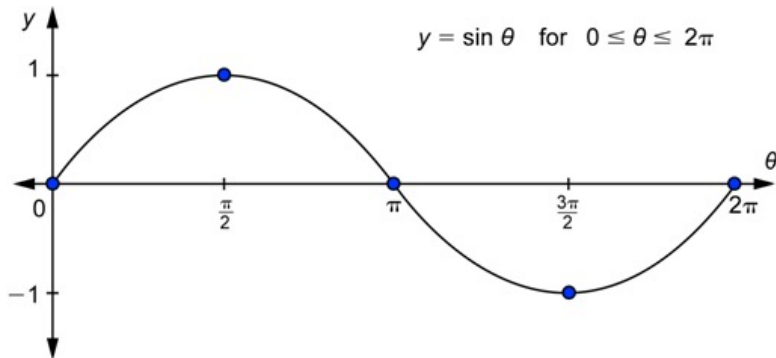


UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education



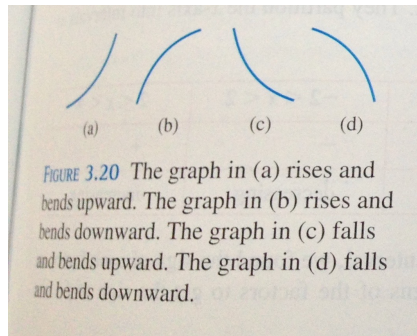
# ENACT AND REFLECT ON OPERATIONS

조작을 실행하고 반영

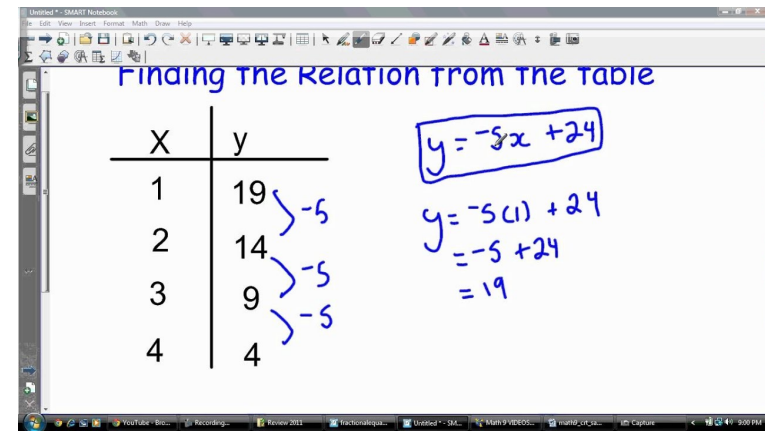


Presenting graphs as finished products or as definitions.

그래프를 완성된 산출물이나 정의로 제시하기



Restrict graphs to one orientation.



Emphasizing or moving immediately to equations, tables, and other inscriptions and symbols that don't afford enacting operations.

조작 불가능한 방정식, 표, 다른 서술이나 기호로 즉각 강조하거나 움직이기

그래프를 하나의 방향으로 제한

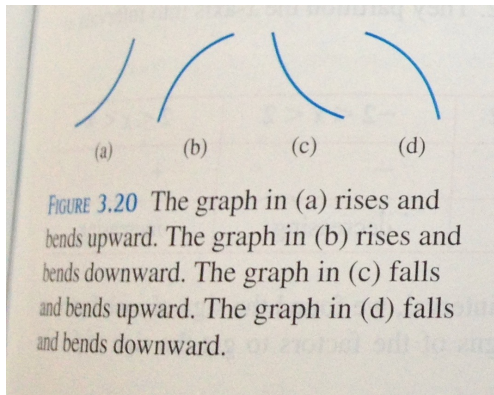


UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education



# COORDINATE AND TRANSFORM OPERATIONS

조작을 조정하고 변환

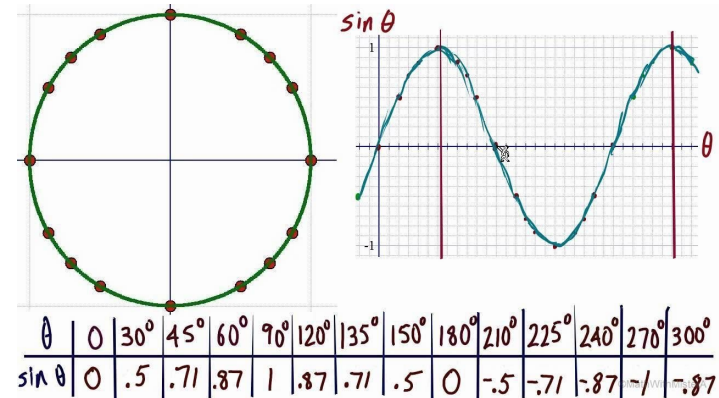


Restrict graphs and their properties to one orientation.

그래프와 그 성질을 하나의 방향으로 제한

We use the word **slope** to describe the steepness of a line. A line that slants *upward* from left to right, like line  $\ell$ , has a **positive slope**. A line that slants *downward* from left to right, like line  $n$ , has a **negative slope**.

Define things based on perceptual features. 지각적 특징에 기반하여 정의



Not giving attention to coordinating or transforming to conceive equivalence.

동치를 이루기 위해 조정하고 변환하는 것에 집중하지 않기

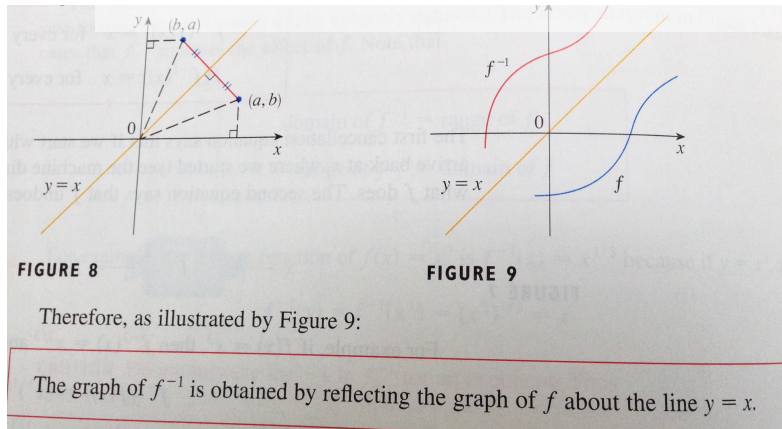


UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education



# UNDERSTAND CONVENTIONS AS A CHOICE

관습을 선택으로 이해



Focus on skills and procedures that *require* “conventions” be followed

“관습”이 필요한 기술과 절차에 집중하기

We use the word **slope** to describe the steepness of a line. A line that slants *upward* from left to right, like line  $\ell$ , has a **positive slope**. A line that slants *downward* from left to right, like line  $n$ , has a **negative slope**.

Present definitions that *require* “conventions” be followed

Give no attention to the personal establishment and need for conventions.

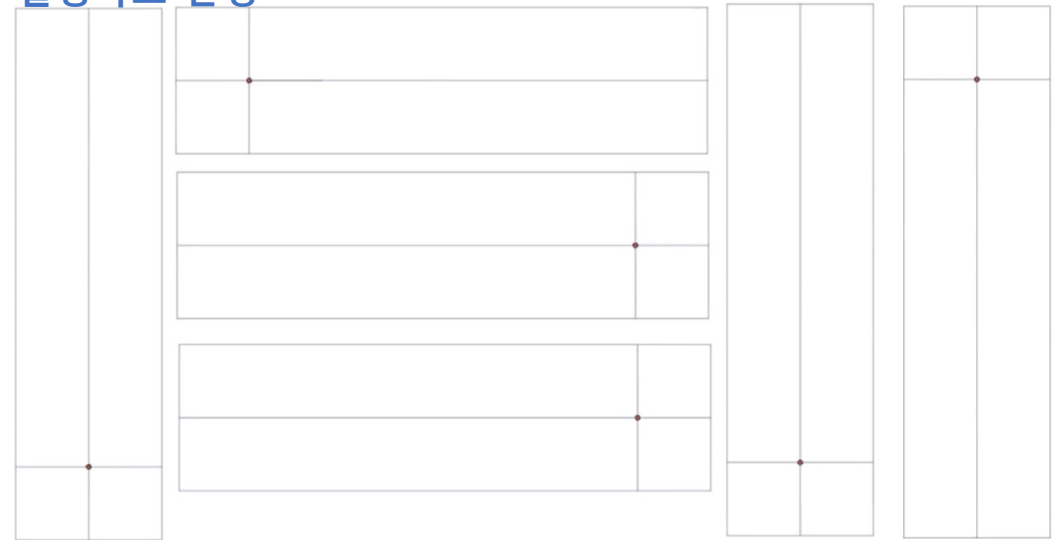
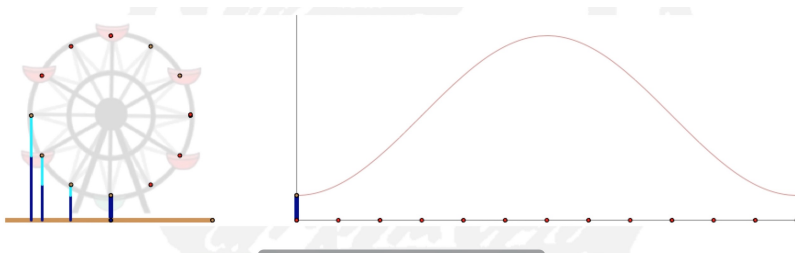
관습에 대한 개인적 확립과 필요에 집중하지 않기

“관습”이 필요한 정의를 제시



# ENACT AND REFLECT ON OPERATIONS

조작을 실행하고 반영



Allowing students to construct graphs and enact operations across multiple orientations, while emphasizing that inscriptions and symbols reference or name those operations.

서술이나 기호를 참고하거나  
조작을 명명하는 것을  
강조하는 대신, 학생들이  
여러 방향을 아우르는 조작을  
실행하고 그래프를  
구성하도록 하기



UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**

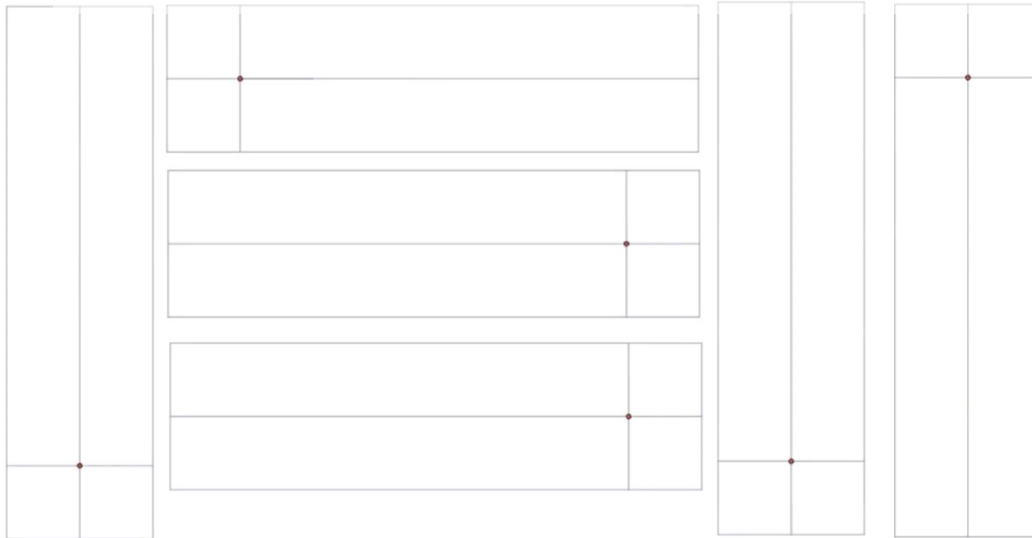
Mary Frances Early  
College of Education





# COORDINATE AND TRANSFORM OPERATIONS

조작을 조정하고 변환



Allowing students the opportunity to encounter multiple coordinate systems and orientations in order to extend the relationships they've constructed in order to conceive equivalence.

동치를 이루기 위해 학생들이  
구성한 관계를 확장하기 위해  
다양한 좌표 체계와 방향에  
마주할 수 있는 기회를  
제공하기



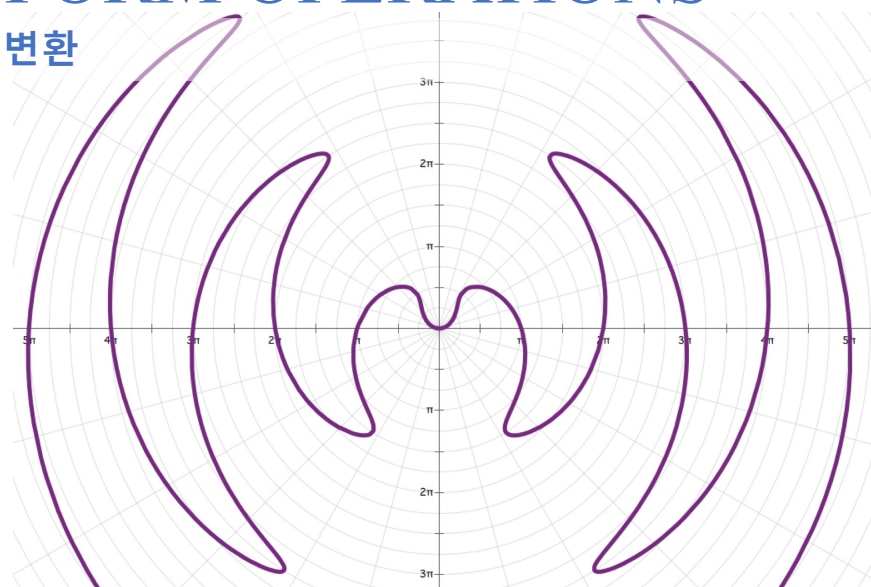
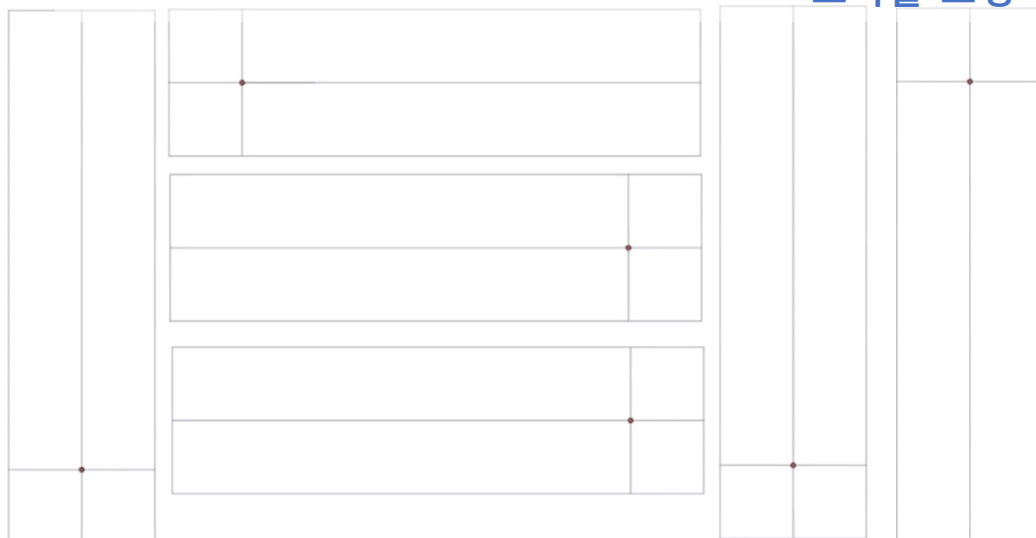
UNIVERSITY  
**GEORGIA**

Mary Frances Early  
College of Education



# COORDINATE AND TRANSFORM OPERATIONS

조작을 조정하고 변환



Allowing students the opportunity to encounter multiple coordinate systems and orientations in order to extend the relationships they've constructed in order to conceive equivalence.

동치를 이루기 위해 학생들이  
구성한 관계를 확장하기 위해  
다양한 좌표 체계와 방향에  
마주할 수 있는 기회를  
제공하기



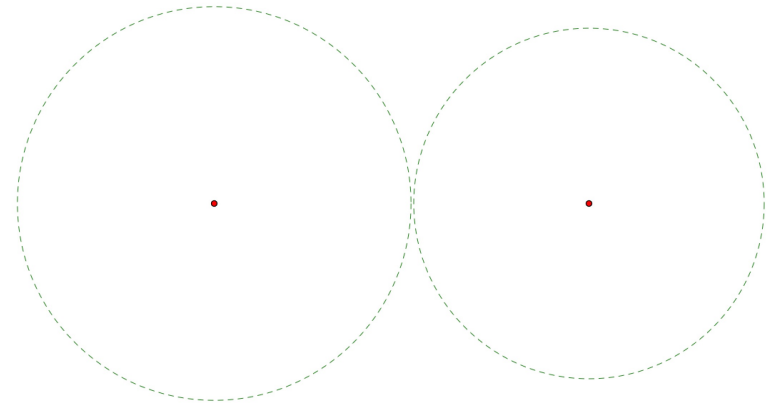
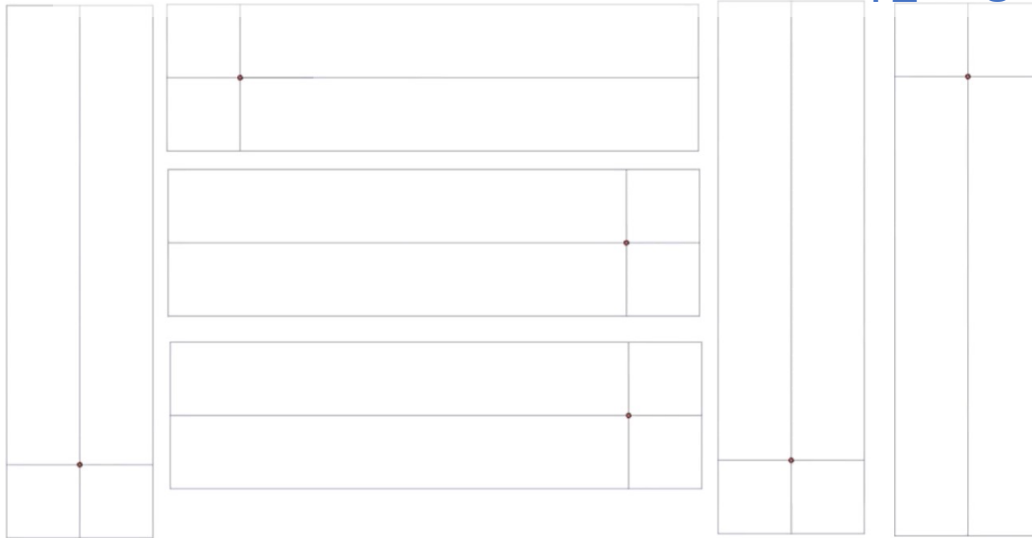
UNIVERSITY  
**GEORGIA**

Mary Frances Early  
College of Education



# COORDINATE AND TRANSFORM OPERATIONS

조작을 조정하고 변환



*\*Lengths are measured relative to  $1/(\pi/2)$  of the magnitude between the two poles.*

Allowing students the opportunity to encounter multiple coordinate systems and orientations in order to extend the relationships they've constructed in order to conceive equivalence.

동치를 이루기 위해 학생들이  
구성한 관계를 확장하기 위해  
다양한 좌표 체계와 방향에  
마주할 수 있는 기회를  
제공하기



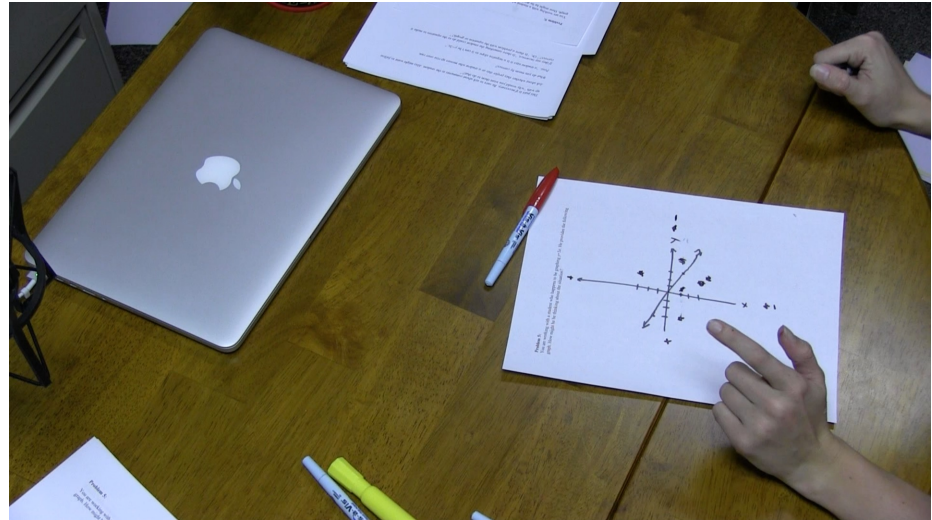
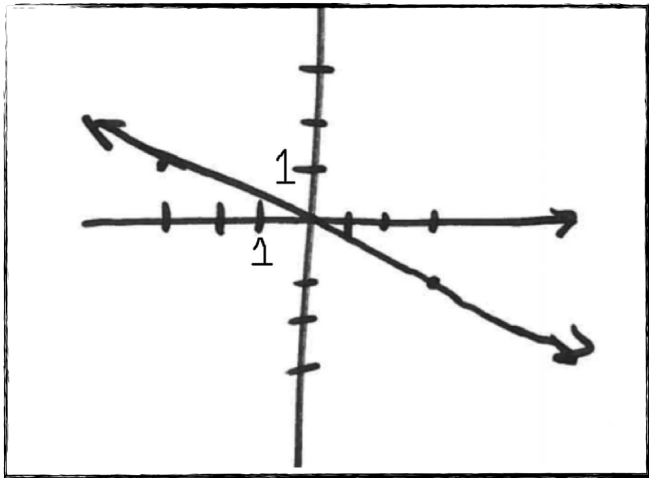
UNIVERSITY  
GEORGIA

Mary Frances Early  
College of Education



# UNDERSTAND CONVENTIONS AS A CHOICE THAT IS NOT REQUIRED

관습을 필수가 아닌 선택으로 이해



Allowing students the opportunity to experience a need for establishing conventions while understanding that they need not be followed.

학생들에게 관습을 따라야 할 필요가 없다는 점을 이해하면서 관습을 세울 필요를 경험하는 기회를 제공하기



UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**

Mary Frances Early  
College of Education



세 주요  
(하지만 간단한)  
특징

# Three Important (but brief) Distinctions

Framing  
Foundations for  
Future Learning

미래 학습을 위한  
토대 프레임

Framing  
Models of Students'  
Mathematics

학생들의 수학의  
모델 프레임



# Framing Foundations for Future Learning

미래 학습을 위한 토대 프레임



UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**

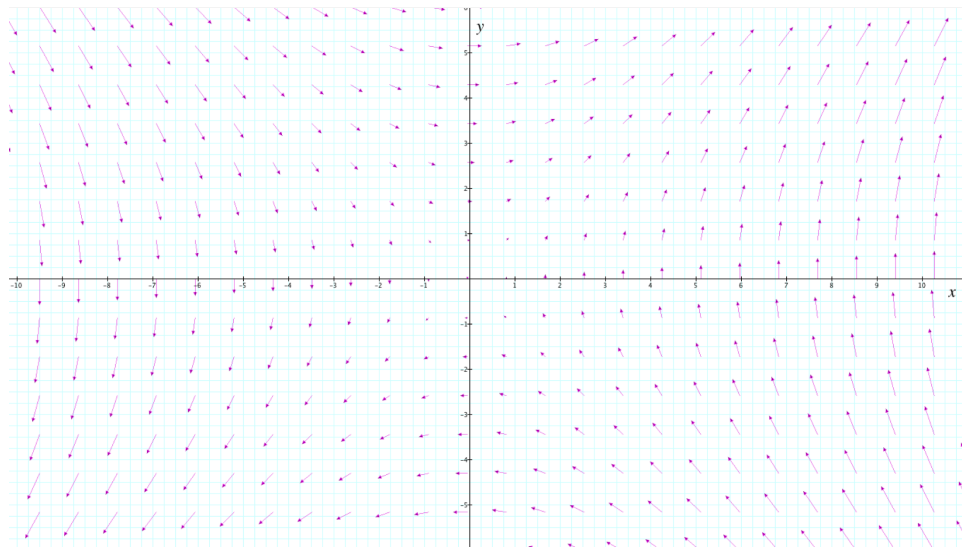
Mary Frances Early  
College of Education



# Framing Foundations for Future Learning

미래 학습을 위한 토대 프레임

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$



Phase Plane

위상평면



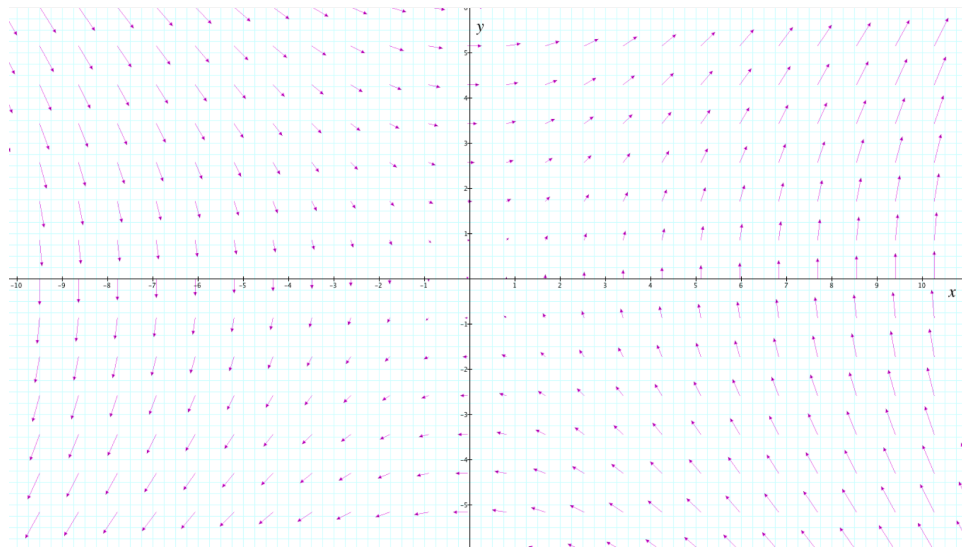
UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education



# Framing Foundations for Future Learning

미래 학습을 위한 토대 프레임

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$



Phase Plane

위상평면



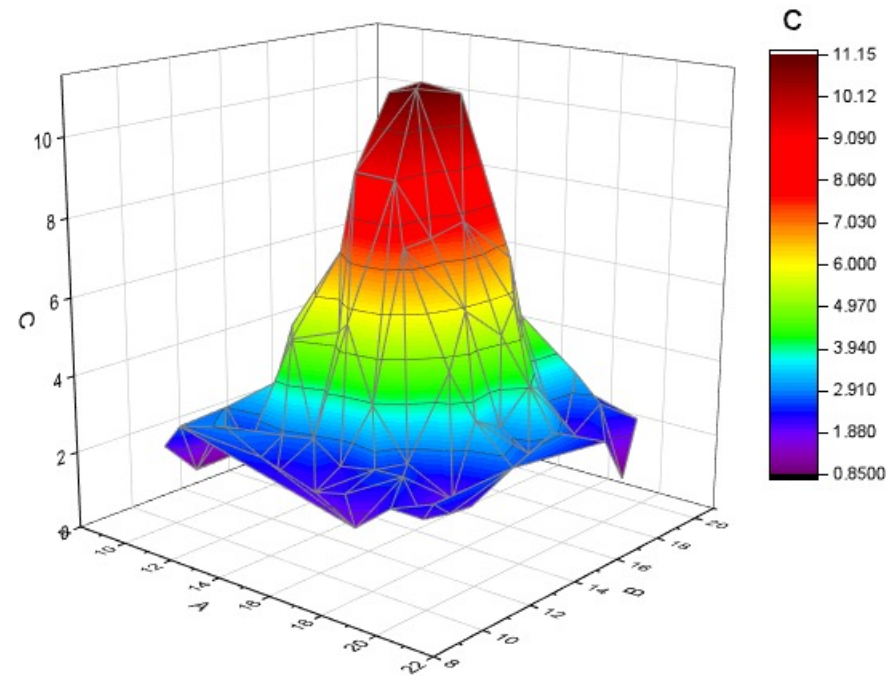
UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education





# Framing Foundations for Future Learning

## 미래 학습을 위한 토대 프레임



3D Plotting

3D 플로팅

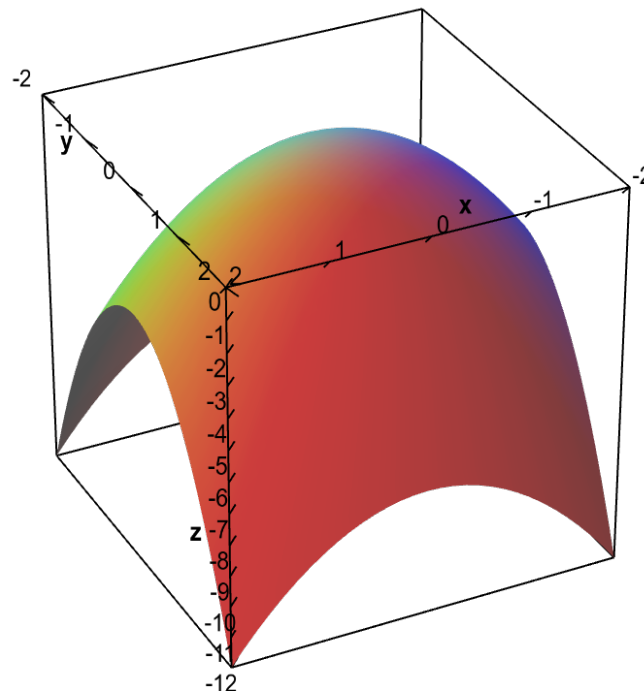


UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education



# Framing Foundations for Future Learning

## 미래 학습을 위한 토대 프레임



Level Sets

레벨 집합

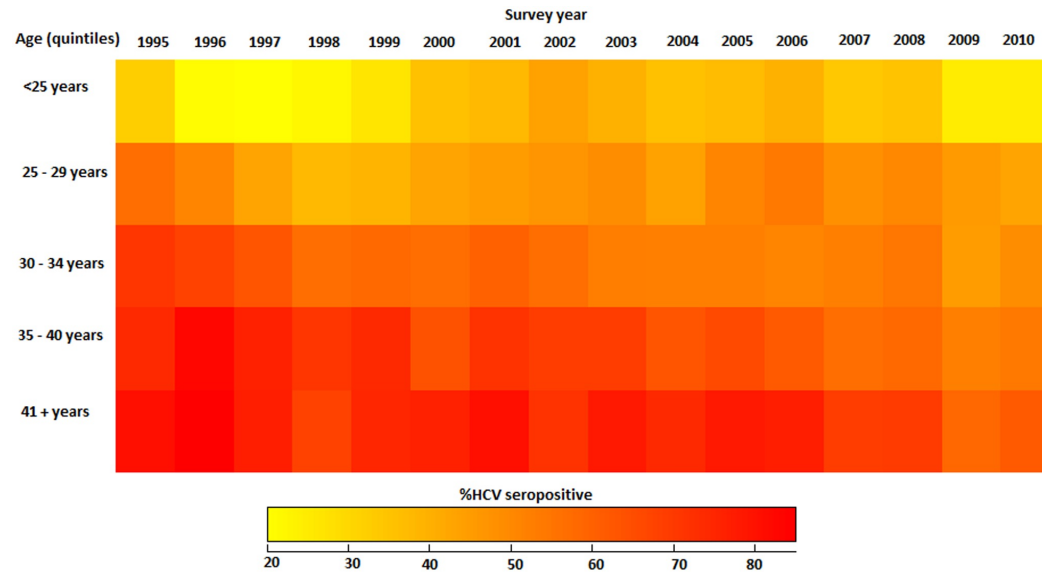


UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education



# Framing Foundations for Future Learning

## 미래 학습을 위한 토대 프레임



Heat Maps

적외선 열지도

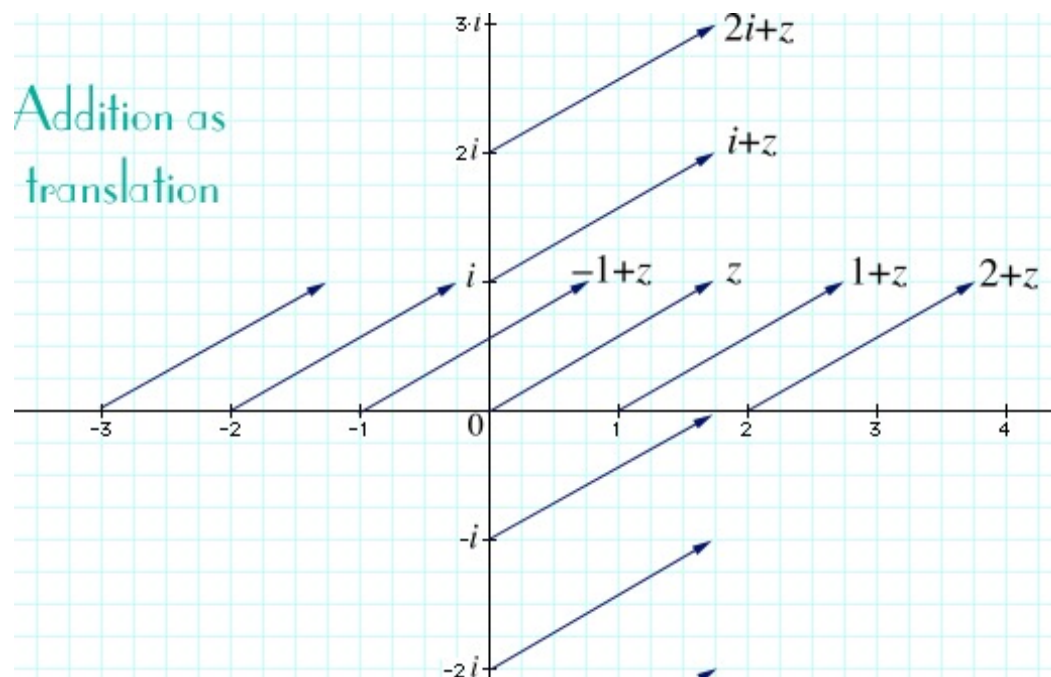


UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education



# Framing Foundations for Future Learning

## 미래 학습을 위한 토대 프레임

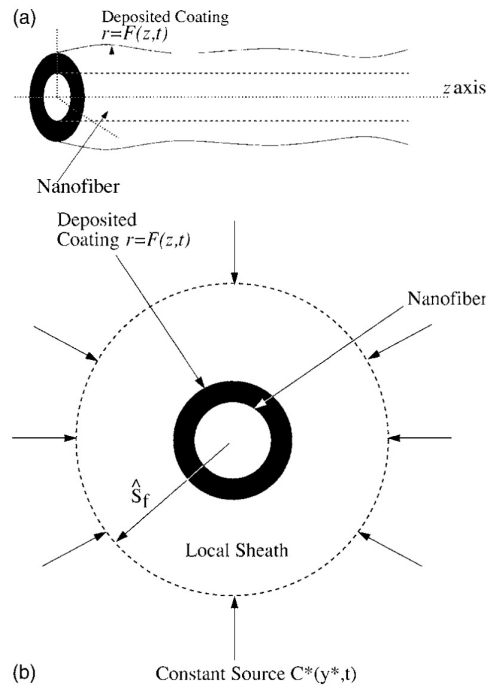


UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education

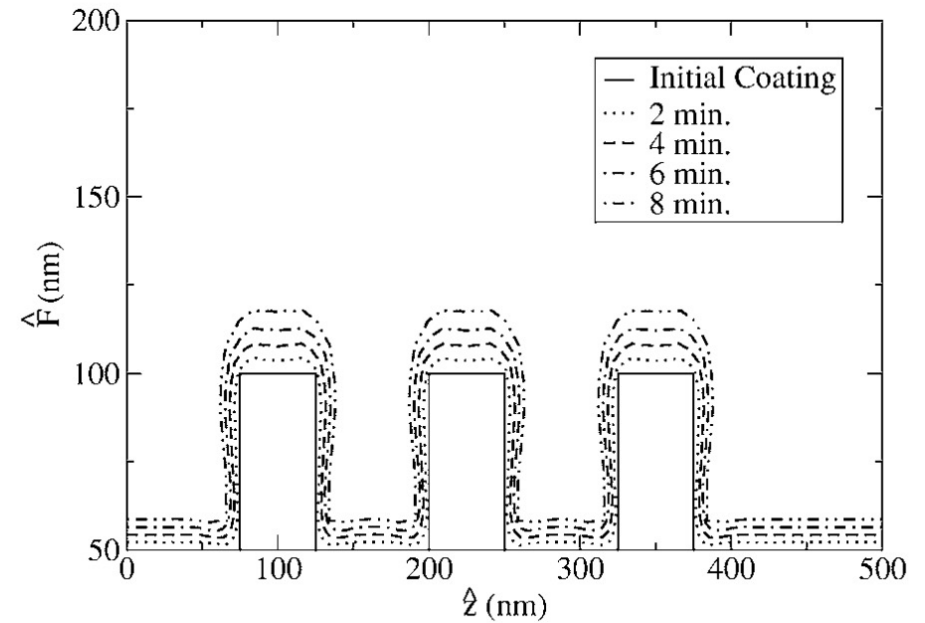


# Framing Foundations for Future Learning

## 미래 학습을 위한 토대 프레임



$$\hat{c}_t = \hat{D} \left[ \hat{c}_{\hat{r}\hat{r}} + \frac{1}{\hat{r}} \hat{c}_{\hat{r}} + \frac{1}{\hat{r}^2} \hat{c}_{\hat{z}\hat{z}} \right]$$



Mathematical Modeling

수학적 모델링



UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**  
Mary Frances Early  
College of Education



# Pulling Together Three Important Distinctions

## 세 주요 특징의 통합

Provide students sufficient opportunities to enact and reflect on mental operations across a variety of situations and material that afford those operations.

학생들에게 조작 가능한 다양한 상황과 도구를 아우르는 정신적 조작을 실행하고 반영한 충분한 활동을 제공한다.

Design opportunities that target figurative and operative forms of thought in order to engender and privilege the coordination and transformation of mental operations rather than perceptual features.

지각적 특징보다 정신적 조작의 조정과 변환을 발생시키고 중시하도록 하기 위해 사고의 형상적, 조작적 형태를 기회를 설계한다.

Give students opportunities to establish conventions when differentiating what is critical to representing some concept from what is merely an element specific to that representation or communication.

어떤 개념을 표현하기 위해 중요한 것을 단순하게 표현이나 의사소통이라는 요소로부터 구별할 때, 학생들에게 관습을 세울 기회를 부여한다.



# Three Important Distinctions for STEM Learning

## STEM 학습에서 세 주요한 특징

Provide students sufficient opportunities to enact and reflect on mental operations across a variety of situations and material that afford those operations.

학생들에게 조작 가능한 다양한 상황과 도구를 아우르는 정신적 조작을 실행하고 반영한 충분한 활동을 제공한다.

Design opportunities that target figurative and operative forms of thought in order to engender and privilege the coordination and transformation of mental operations rather than perceptual features.

지각적 특징보다 정신적 조작의 조정과 변환을 발생시키고 중시하도록 하기 위해 사고의 형상적, 조작적 형태를 기회를 설계한다.

Give students opportunities to establish conventions when differentiating what is critical to representing some concept from what is merely an element specific to that representation or communication.

어떤 개념을 표현하기 위해 중요한 것을 단순하게 표현이나 의사소통이라는 요소로부터 구별할 때, 학생들에게 관습을 세울 기회를 부여한다.



THANK YOU!  
감사합니다

[kvcmoore@uga.edu](mailto:kvcmoore@uga.edu)

[www.squaresandcircles.me](http://www.squaresandcircles.me)



UNIVERSITY OF  
**GEORGIA**

Mary Frances Early  
College of Education

